Ellipsoide de John Loewner

Théorème 1. *Tout compact K de $\mathbb{R}^n$ où $0 \in \overset{\circ}{K}$ est contenu dans un* <u>*unique*</u> *ellipsoïde $\mathcal{B}_A$ où $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, de volume* <u>*minimal*</u>*.*

Démonstration. Soient $(\mathbb{R}^n, <,>)$ l'espace euclidien usuel, $\mathcal{B}$ la boule unité fermée asscociée et $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.

Notation 1. *On note $\mathcal{B}_A = \{x \in \mathbb{R}^n, < Ax, x > \leq 1\}$ la boule unité fermé pour le produit scalaire $<,>_A$.*

Objectif 1. *Relions le volume de l'ellipsoide $\mathcal{B}_A$ à celui de $\mathcal{B}$.*

Puisque $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, il existe une unique *racine carrée* $C \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que $A = C^2$ et on a :

$$\mathcal{B}_A = \{x \in \mathbb{R}^n, < C^2x, x > \leq 1\} = \{x \in \mathbb{R}^n, < Cx, Cx > \leq 1\} = \{x \in \mathbb{R}^n, Cx \in \mathcal{B}\} = C^{-1}(\mathcal{B})$$

Par les propriétés de <u>la mesure de Lebesgue</u> λ et son interprétation en termes de volume, on a :

$$V(\mathcal{B}_A) = \lambda(\mathcal{B}_A) = |\det(C^{-1})|\lambda(\mathcal{B}) = |\det(C)|^{-1}\lambda(\mathcal{B}) = \det(A)^{-\frac{1}{2}}V(\mathcal{B})$$

comme $(\det(A) = \det(C)^2 > 0)$.

Objectif 2. Minimiser *l'application volume $V : S \longmapsto V(\mathcal{B}_S)$ sur $\{S \in S_n^{++}(\mathbb{R}) \mid K \subset \mathcal{B}_S\}$, ce qui revient à* minimiser $\mu : S \longmapsto \det(S)^{-\frac{1}{2}}$. *Par compacité de K, il existe $r > 0$ tel que $K \subset \mathrm{BF}(0, r) = r\mathcal{B} = \mathcal{B}_{S_0}$ où $S_0 = \frac{1}{r^2}\mathrm{I}_n$. Comme $S_0 \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ et $K \subset \mathcal{B}_{S_0}$ minimiser μ sur $\{S \in S_n^{++}(\mathbb{R}) \mid K \subset \mathcal{B}_S\}$ revient à minimiser μ sur*

$$E = \{S \in S_n^{++}(\mathbb{R}) \mid K \subset \mathcal{B}_S \text{ et } \mu(S) \leq \mu(S_0)\}$$

Méthode :
- Montrer que E est convexe, non vide et compact = fermé-borné.
- Montrer que μ est strictement convexe sur $S_n^{++}(\mathbb{R})$, elle le sera aussi sur E.

Ceci répondra au problème posé car :
- par compacité de E et continuité de μ sur E, μ admettra un minimum sur E qui sera atteint.
- La stricte convexité de μ sur le convexe E assurera <u>l'unicité du minimum</u>.

<u>**Etape 1 :**</u> montrons que $\mu = \det^{-\frac{1}{2}}$ est strictement convexe sur $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Nous aurons besoin du lemme suivant :

Lemme 1. $\det(A)^{\frac{1}{n}} + \det(B)^{\frac{1}{n}} \leq \det(A + B)^{\frac{1}{n}}$ *pour $A, B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et l'égalité n'a lieu que si A et B sont positivement proportionnelles.*

Démonstration. Par pseudo-réduction simultanée, il existe $\mu_1, \ldots, \mu_n > 0$ et $P \in GL_n(\mathbb{R})$ tels que $A = {}^tPP$ et $B = {}^tP\Delta P$ où l'on a noté $\Delta = \mathrm{Diag}(\mu_1, \ldots, \mu_n)$. Or, $\det(A) = \det(P)^2$, $\det(B) = \det(P)^2 \det(\Delta)$ et $\det(A+B) = \det(P)^2 \det(I_n+\Delta)$ puisqu'aussi $A+B = {}^tP(\mathrm{I}_n+\Delta)P$. Ainsi, il suffit donc de montrer que :

$$\det(\mathrm{I}_n)^{1/n} + \det(\Delta)^{1/n} \leq \det(\mathrm{I}_n + \Delta)^{1/n} \text{ } i.e \text{ } 1 + \left(\prod_{i=1}^n \mu_i\right)^{1/n} \leq \left(\prod_{i=1}^n (1 + \mu_i)\right)^{1/n}$$

ceci encore équivalent à $\left(\prod_{i=1}^n \frac{1}{1+\mu_i}\right)^{1/n} + \left(\prod_{i=1}^n \frac{\mu_i}{1+\mu_i}\right)^{1/n} \leq 1$. On a alors immédiatement le résultat par <u>l'inégalité arithmético-géométrique</u> puisque $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \frac{1}{1+\mu_i} + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \frac{\mu_i}{1+\mu_i} = 1$. Le cas d'égalité dans l'inégalité arithmético géométrique est caractérisé par :

$$\frac{1}{\mu_1+1} = \frac{1}{\mu_2+1} = \ldots = \frac{1}{\mu_n+1} \text{ et } \frac{\mu_1}{\mu_1+1} = \frac{\mu_2}{\mu_2+1} = \ldots = \frac{\mu_n}{\mu_n+1}$$

ce qui équivaut à $\mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_n = \mu$ et donc $\Delta = \mu\mathrm{I}_n$ où $\mu > 0$ et A et B sont positivement proportionnelles. □

Déduidons en la stricte convexité de μ sur $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Soit $t \in [0, 1]$, d'après ce qui précède et n-linéarité de det, il vient alors :

$$t\det(A)^{\frac{1}{n}} + (1-t)\det(B)^{\frac{1}{n}} = \det(tA)^{\frac{1}{n}} + \det((1-t)B)^{\frac{1}{n}} \leq \det(tA + (1-t)B)^{\frac{1}{n}}.$$

Or, sur $\mathbb{R}_+^*$, $x \longmapsto x^{-\frac{n}{2}}$ est décroissante et strictement convexe, d'où :

$$\begin{aligned}\det(tA+(1-t)B)^{-\frac{1}{2}} = (\det(tA+(1-t)B)^{\frac{1}{n}})^{-\frac{n}{2}} &\leq \quad (t\det(A)^{\frac{1}{n}} + (1-t)\det(B)^{\frac{1}{n}})^{-\frac{n}{2}} \\ &\leq \quad t\det(A)^{-\frac{1}{2}} + (1-t)\det(B)^{-\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

D'où la convexité attendue. De plus, pour $t \in]0,1[$, on a égalité dans l'inégalité ci dessus si et seulement si $\det(A) = \det(B)$ avec $B = \lambda A$ où $\lambda > 0$ soit si et seulement si $A = B$ de par la caractérisation du cas d'égalité de l'inégalité du lemme 1 et la stricte convexité de $x \longmapsto x^{-\frac{n}{2}}$ sur $\mathbb{R}_+^*$. D'où la stricte convexité attendue.

Etape 2 : il reste à montrer que E est un compact convexe non vide :

1) Il est clair que E est **non vide** car $S_0 \in E$.

2) E est **convexe** car $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ l'est et aussi car pour $R, S \in E$, on a :

$$\mu(tR+(1-t)S) \leq t\mu(R) + (1-t)\mu(S) \leq t\mu(S_0) + (1-t)\mu(S_0) = \mu(S_0)$$

De plus, comme $K \subset \mathcal{B}_S$ et $K \subset \mathcal{B}_R$, on a $< Sx, x > \leq 1$ et $< Rx, x > \leq 1$ et pour $x \in K$:

$$< (tR+(1-t)S)x, x >= t < Rx, x > +(1-t) < Sx, x > \leq 1 \Longrightarrow K \subset \mathcal{B}_{tR+(1-t)S}$$

D'où la convexité de E, puisque $tR+(1-t)S \in E$.

3) E est **fermé**. Soit $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E convergeant vers S ($S \in S_n^+(\mathbb{R})$). Pour $n \in \mathbb{N}$, on a $K \subset \mathcal{B}_{S_n}$ soit $< S_n x, x > \leq 1$ pour $x \in K$. A x fixé dans K, l'application $\phi_x : M \longmapsto < Mx, x >$ est *continue* car linéaire, avec d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$|\phi_x(M)| \leq \|Mx\| \times \|x\| \leq \|M\| \times \|x\|^2 = k\|M\| \text{ où } k = \|x\|^2$$

On en déduit que pour $x \in K$, on a :

$$\lim_{n\mapsto+\infty} < S_n x, x > = < Sx, x > \leq 1 \Longrightarrow K \subset \mathcal{B}_S$$

De plus, comme $\mu(S_n) \leq \mu(S_0)$ pour tout n, par continuité de μ on a :

$$\lim_{n\mapsto+\infty} \mu(S_n) = \mu(S) \leq \mu(S_0) \Longrightarrow \det(S) \geq \det(S_0) = \frac{1}{r^2} > 0 \Longrightarrow S \in S_n^{++}(\mathbb{R}).$$

D'où $S \in E$ et E est fermé.

4) E est **borné**. Montrons qu'il existe $k > 0$ tel que $\|S\| \leq k$ pour tout $S \in E$. Or, $0 \in \overset{\circ}{K}$, il existe $\lambda > 0$ tel que $BF(0, \lambda) = \lambda\mathcal{B} \subset K$. Pour $S \in E$, et $\|x\| \leq 1$ on a $\lambda x \in \lambda\mathcal{B} \subset K \subset \mathcal{B}_S$ et donc :

$$< S(\lambda x), \lambda x > \leq 1 \Longrightarrow \lambda^2 < Sx, x > \leq 1 \Longrightarrow < \sqrt{S}x, \sqrt{S}x > \leq \tfrac{1}{\lambda^2} \Longrightarrow \|\sqrt{S}\| \leq \tfrac{1}{\lambda}$$

où l'on a noté $\sqrt{S}$ l'unique *racine carrée* de la matrice $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$. Comme $S = \sqrt{S}^2$ on a : $\|S\| \leq \|\sqrt{S}\|^2 \leq \frac{1}{\lambda^2}$ et E est bornée. □

Explication supplémentaire : $r\mathcal{B} = \mathcal{B}_{S_0}$. En effet :

$$x \in r\mathcal{B} \Longleftrightarrow r^{-1}x \in \mathcal{B} \Longleftrightarrow < r^{-1}x, r^{-1}x > \leq 1 \Longleftrightarrow < r^{-2}x, x > \leq 1 \Longleftrightarrow x \in \mathcal{B}_{S_0}.$$

Application 1. *Tout sous-groupe compact de $GL_n(\mathbb{R})$ est conjugué à un sous-groupe de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.*

Démonstration. Soit G un sous-groupe compact de $GL_n(\mathbb{R})$. On pose $K = \bigcup_{A\in G} A(\mathcal{B})$ et on définit :

$$\phi : \begin{array}{ccc} G \times \mathcal{B} & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ (A, x) & \longmapsto & Ax \end{array} \text{ soit } K = \mathrm{Im}(\phi).$$

Comme G est compact et $\mathcal{B}$ également car fermée-bornée, $G \times \mathcal{B}$ est compact et $K = \mathrm{Im}(\phi)$ l'est aussi comme image d'un compact par une application continue. De plus $0 \in \mathcal{B} \subset K \Longrightarrow 0 \in \overset{\circ}{K}$, par le *théorème de John Loewner*, il existe donc une unique matrice $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que $K \subset \mathcal{B}_S$ où $\mathcal{B}_S$ est de volume minimal.

But : Montrer que $G \subset \mathcal{O}(S) = \{M \in M_n(\mathbb{R}) \mid {}^tMSM = S\}$ le groupe orthogonal associé à S.

Objectif : Soit $M \in G$, montrons que $M(K) = K$. Soit $y \in K$, alors :

$$\exists A \in G,\ x \in \mathcal{B} \text{ tel que } y = Ax \text{ soit } y = M(\underbrace{M^{-1}Ax}_{\in K}) \Longrightarrow K \subset M(K).$$

Si $x \in M(K)$, alors $x = M(Ay)$ pour $A \in G$ et $y \in \mathcal{B}$ et donc $x \in K$ car $MA \in G$. On en déduit donc que $M(K) = K$.

Objectif : Montrons que $|\det(M)| \leq 1$. Soit $(M^p)_{p \in \mathbb{N}}$ suite d'éléments de G, G étant compact, il existe une sous-suite convergente $(M^{p_k})_{k \in \mathbb{N}}$ convergente vers $N \in G$. Si $|\det(M)| < 1$, on aurait par continuité de det :

$$N = \lim_{k \longmapsto +\infty} M^{p_k} \Longrightarrow \det(N) = \lim_{k \longmapsto +\infty} \det(M^{p_k}) = \lim_{k \longmapsto +\infty} \det(M)^{p_k} = 0, \text{ absurde.}$$

De plus, l'application det est continue sur le compact G, donc y est bornée. Supposons par l'absurde $|\det(M)| > 1$, alors pour $k \in \mathbb{N}$ on aurait :

$$M^k \in G \text{ et } |\det(M)^k| = |\det(M)|^k \underset{k \longmapsto +\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

Ainsi, nécessairement $|\det(M)| = 1$.

Objectif : Montrons que $R = S$ pour $R = {}^tMSM$. On a naturellement $R \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ car :

$${}^txRx = {}^tx({}^tMSM)x = {}^t(Mx)S(Mx) > 0 \text{ si } Mx \neq 0 \Longleftrightarrow x \neq 0.$$

puisque $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$. On a aussi $K \subset \mathcal{B}_R$, en effet, si $x \in K$, alors :

$${}^txRx = {}^t(Mx)S(Mx) \leq 1 \text{ car } Mx \in M(K) = K \subset \mathcal{B}_S.$$

Comme $|\det(M)| = 1$, $\det(R) = \det(M)^2 \det(S) = \det(S)$, soit avec les notations précédentes : $\mu(R) = \mu(S)$. Par *unicité* de l'ellipsoide de volume minimal contenant K, on a donc :

$$R = S \text{ et } {}^tMSM = S \Longrightarrow M \in \mathcal{O}(S).$$

Objectif : Il reste à montrer que $\mathcal{O}(S)$ est conjugué à $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Comme $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, elle est congruente à la matrice I_n et il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $S = {}^tPP$. Ainsi :

$$\begin{aligned} {}^tMSM = S &\Longleftrightarrow {}^tM({}^tPP)M = {}^tPP \\ &\Longleftrightarrow {}^t(PM)PM = {}^tPP \\ &\Longleftrightarrow {}^t(PMP^{-1})PMP^{-1} = \mathrm{I}_n \\ &\Longleftrightarrow PMP^{-1} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \end{aligned}$$

D'où $G \subset \mathcal{O}(S) = P^{-1}\mathcal{O}_n(\mathbb{R})P$ et donc $PGP^{-1} \subset O_n(\mathbb{R})$. On en conclut que G est conjugué à PGP^{-1} qui est un sous-groupe de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. □

Rappel 1. *Soit $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$. On appelle ellipsoide associée à A noté $\mathcal{B}_A$, la boule unité fermée de l'espace euclidien $(\mathbb{R}^n, <,>_A)$ où le produit scalaire est donné par :*

$$(x, y) \longmapsto < Ax, y > = < x, Ay > = < x, y >_A$$

et $\mathcal{B}_A = \{x \in \mathbb{R}^n, < Ax, x > \leq 1\} = \{x \in \mathbb{R}^n, ||x||_A \leq 1\}$.

Rappel 2. ***Pseudo-réduction simultannée.***
Soient $S_1 \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ et $S_2 \in S_n(\mathbb{R})$. Alors il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $S_1 = {}^tPP$ et $S_2 = {}^tPDP$ où D est diagonale.

Démonstration. Comme $S_1 \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, il existe $P_1 \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et D_1 diagonale à termes diagonaux strictement positifs tels que $S_1 = {}^tP_1D_1P_1$. Notant D_1' l'unique racine carré de D_1, ie l'unique matrice symétrique définie positive telle que $D_1 = (D_1')^2$, on a :

$$S_1 = {}^tP(D_1'D_1')P = {}^t(D_1'P_1)D_1'P_1 \text{ où } D_1'P_1 \in GL_n(\mathbb{R}).$$

Posons, $B = D_1'P_1$, on a donc $S_1 = {}^tBB$ et comme $S_2 \in S_n(\mathbb{R})$, on a aussi

$$({}^tB)^{-1}S_2(B^{-1}) \in S_n(\mathbb{R})$$

Alors, il existe $Q \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et D_2 diagonale telle que :

$$({}^tB)^{-1}S_2B^{-1} = {}^tQD_2Q \Longrightarrow S_2 = {}^t(QB)D_2(QB)$$

En posant $P = QB$, on a finalement :

$$S_2 = {}^tPD_2P \text{ et } S_1 = {}^tBB = {}^tB({}^tQQ)B = {}^t(QB)QB = {}^tPP \text{ car } Q \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}).$$

$\square$

Rappel 3. ***Unicité de la racine carré pour une matrice symétrique définie positive.*** *Si $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, il existe une unique matrice $B \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ tel que $A = B^2$.*

Rappel 4. *L'ensemble $S_n^{++}(\mathbb{R})$ est convexe.*

Démonstration. Soient $R, S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ et $\lambda \in [0,1]$. Pour $x \in \mathbb{R}^n$,$x \neq 0$ on a :

$${}^tx(\lambda R + (1-\lambda)S)x = \lambda\, {}^txRx + (1-\lambda)\, {}^txSx > 0 \text{ car } R, S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$$

D'où le résultat. $\square$

Références :

- Objectif agrégation pour la définition d'un ellipsoide et le lien entre déterminant et volume.
- Alesandri, thèmes de géométrie pour le Thm et l'application.